数理解析研究所講究録
884巻 1994年 209-218

Liftings of Frobenius, degeneracies of Hodge – de Rham spectral sequences, and ordinarities

東京大学数理科学科 (Yukiyoshi Nakkajima)

§ 初めに.

現在, 1次元 p 進体を基礎体とする p-adic Hodge 理論が盛んに研究されているが, ここでは長さ有限の Witt 環, いわば, "0.5次元 p 進体" 上の多様体の Hodge 理論に関する, 筆者が得た結果を述べたいと思う。筆者の未熟さゆえ, 時流に乗っているとは言い難いが, その点は御容赦願いたい。いくつかの結果を大雑把に箇条書きすると, 次のようになる。

- W_2 (長さ 2 の Witt 環) 上の proper smooth scheme は, special fiber の Frobenius の lifting を endomorphism として持てば, その special fiber は ordinary である。
- W_n ($n \geq 2$) 上の proper smooth scheme は, special fiber の Frobenius の lifting を endomorphism として持ち, W_{n+1} 上の flat scheme に持ち上がれば, Hodge – de Rham スペクトル系列は任意の次数で E_1 で退化する。
- 上のような多様体にあと少し条件を課すれば, Hodge-Witt

的なもの（filtration, cohomology）は Hodge 的なものと一致する。

上のような結果を得るに当たって，暖かい興味を抱いてくれた加藤和也先生，いくつかのコメントや有益な疑問点（とくに ordinarity との関係，canonical lifting の可能性など）を投げかけてくれた諏訪紀幸氏，一々名前を出しませんが，方々で話を聞いてくださった人々にたいへん感謝します。

§ 結果

引用文献は論理的整合性が整う最低限のものとする。以下，ほとんどの場合，結果は適当な log structure をつけても成立するが，logarithmic people は log をどういう風につければよいかは直ちにわかるであろうし，logarithmic people でない人にとっては，log をつけて結果を述べると，周知でない概念のオンパレードとなってしまい，この稿を読んでいただく気持ちを失わせてしまうであろうから（弱気な態度かもしれないが），以下，結果は通常のスキームの範囲内で述べる。（log をつけた場合は東京大学プレプリントシリーズ 93-45, 93-46, 94-22 にあります。）

k を標数 $p>0$ の完全体，W_n $(n \geq 2)$ (resp. W) を長さ n (resp. ∞) の k の Witt 環とする。X/W_n を smooth proper scheme とし，X_0 を

X の special fiber, つまり, $X_0 := X \otimes_{W_n} k$ とする。さらに次の図式を可換にする morphism $F: X \longrightarrow X$ が与えられているとする。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, W_n \arrow[r, "\sigma^*"'] & \mathrm{Spec}\, W_n \end{tikzcd} \qquad (\sigma: W_n \longrightarrow W_n \text{ は } W_n \text{ の Frobenius})$$

定理を述べる前に加藤先生[BK]による ordinarity の定義の復習をする。Y/k を proper smooth scheme としたとき, $H^j(Y, d\Omega^i_{Y/k}) = 0$ $(\forall i, j \in \mathbb{Z})$ が成立するとき, Y/k を ordinary と言う。これは次のように言い換えられ, crystalline cohomology に慣れ親しんだ人には身近な概念となる。

Prop. 0 ([IR]) Y の crystalline cohomology $H^m_{crys}(Y/W)$ $(\forall m \in \mathbb{Z})$ が torsion-free のとき, Y/k が ordinary であることと, F-crystal $H^m_{crys}(Y/W)$ の Newton polygon と Hodge number $(h^{0,m}, h^{1,m-1}, \cdots, h^{m,0})$ によって決められる Hodge polygon が一致することとは同値である。ここに $h^{i,j} := \dim_k H^j(Y, \Omega^i_{Y/k})$.

(F-crystal の Newton polygon や Hodge polygon の定義は例えば [Ka] を見てください) したがって, とくに Y が abelian variety のときは, 上の意味の ordinarity とよく知られている ordinarity, "p-torsion point が次元分ある" ということは同値になる。

まず, 次の定理が成立する。

Th. 1. (N—, Illusie) X/W_n を最初に述べた仮定を満たすスキ

ームとしたとき、X_0 は ordinary である。

（注 Illusie さんも、この結果を私とは独立に得たようである。）

定理の statement に一瞬ドキッとするが、証明は専門家にはかなりやさしく、Y が ordinary であることは次と同値であることを知っていればよい（[IR]）。

a) Hodge de Rham spectral sequence $E_1^{i,j} = H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) \Longrightarrow H^{i+j}_{dR}(Y/k)$ は E_1 で退化する。

(b) Conjugate spectral sequence $E_2^{i,j} = H^i(Y, \mathcal{H}^j(\Omega^{\cdot}_{Y/k})) \Longrightarrow H^{i+j}_{dR}(Y/k)$ は E_2 で退化する。)

c) $\mathrm{Fil}_H^{i+1}(H^m_{dR}(Y/k)) \oplus \mathrm{Fil}_c^{m-i}(H^m_{dR}(Y/k)) = H^m_{dR}(Y/k)$ $(\forall i, m)$

ここに Fil_H は Hodge filtration, Fil_c は conjugate filtration.

これらの条件を $Y = X_0$ に対し check すればよいが、key となることは（あとでも再び point となるが）quasi-isomorphism

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega^i_{X_0/k}[-i] \longrightarrow \Omega^{\cdot}_{X_0/k}$$

がつくれることにある。これから、直ちに $H^m_{dR}(X_0/k)$ は Hodge 分解を持つことがわかるので、心情的に a), (b), c) はほぼ明らかであろう。

本論とはちょっとそれるが、Th. 1 と Serre-Tate の abelian scheme に関する変形理論（[M]）を使うことによって、次を得る。

Cor. 2. X/W_n : abelian scheme とする $(n \geq 2)$。X が $X_0 = X \otimes_{W_n} k$ の Frobenius の lifting を持つことと、

a) X_0 : ordinary
b) X の p-divisible gp $=$ (connected part) $\underset{W_n}{\times}$ (etale part)

と同値。とくに、X_0 が ordinary でなければ、X は X_0 の Frobenius の lifting を持たない。

次の結果を述べたいが、その前に以前から知られていたことを述べる。

Th. 3 (Fontaine - Messing, Kato, Deligne - Illusie [DI])

$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k \end{array}$ smooth proper scheme とし、Y が W_2 上の flat scheme $\tilde{Y}$ に持ち上がるとする。

このとき、Hodge de Rham spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(Y, \Omega^i_{Y/k}) \Longrightarrow H^{i+j}_{dR}(Y/k)$$

は $i+j < p$ に対し E_1 で退化する。

Rem. a) Th. 1 の概証で述べたように、$\tilde{Y}$ が Y の Frobenius の lifting を持てば、次数に制限をつけないでこのスペクトル系列は E_1 で退化する。

b) Th. 3 において、次数が p を越えると、退化が成立するか、あるいは、反例があるかどうかわかっていない。Illusie さんからの手紙によると、W. Lang 氏が反例となりそうな例を持っているようだが、まだ確かなことはわかっていないようである。

さて、次の結果を述べる。

Th.4 X を Prop.0 の前に述べた仮定を満たすスキームとし、X が W_{n+1} 上の flat scheme に持ち上がれば、Hodge-de Rham spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/W_n}) \Longrightarrow H^{i+j}_{dR}(X/W_n)$$

は E_1 で退化する。

Rem. a) Th.3 とは異って、結論に次数に関する条件がないことに注意されたい。ただし、X は special fiber X_0 の Frobenius の持ち上げを持つものなので、proper smooth scheme の中でかなり限られたものとなる。

b) 任意の次数で退化が成立するので、一瞬「エッ」と思うが、次の結果と見比べれば、心理的落ち着きを得る。

Th.5 (Illusie-Raynaud [IR]).

Y/k : proper smooth で ordinary とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。このとき、slope spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(Y, W_n\Omega^i_Y) \Longrightarrow H^{i+j}_{crys}(Y/W_n)$$

は E_1 で退化する。

Th.4 と Th.5 を比較する前に、Th.4 の証明の極めて大雑把な方針を述べておく。まず、第一段階として、$\mathcal{O}_X$-module のなす derived category の中で、local には "$\frac{\text{Frobenius}^*}{p^i}$" である canonical morphism

$$C^{-1}_{der} : (\Omega^\cdot_{X/W_n}, pd) \longrightarrow (\Omega^\cdot_{X/W_n}, d)$$

をつくること。C^{-1}_{dcr} の定義を述べることはかなり大変なので、ここでは割愛させていただく。ただ、一点だけ注意をさせていただくと、C^{-1}_{dcr} の構成は、Th.3 の Deligne−Illusie [DI] の証明から触発されたものであるが、彼らの場合 $\Omega^{\cdot}_{X/W_n}$ から射をつくる際、交代化作用素 "$\frac{1}{i!}\sum \mathrm{sgn}$" を施す必要があるので、次数に関する条件が結論に出てくるが、我々の場合、ラッキーなことにそうする必要はないので、結論に次数の条件は出てこない。オ2段階として、$H^{\cdot}_{dR}(X/W_n)$ に F−gauge の構造を付することができること。これは [K] の議論をそのまま、我々の考えている状況に適用すればよい。[K] によって Witt 環上の filtered module と (条件つき) F−gauge のなす category は同値であることが知られているので、Th.4 を得る。

Th.4 と Th.5 の比較に話を戻す。Th.4 と Th.5 は極めて似ているが、片方が他方を含んでいる訳ではない。一般に Ω^{i}_{X/W_n} と $W_n\Omega^{i}_{X_0}$ との間には canonical な morphism さえなく、たとえ cohomology をとっても、一般には比較のしようがない。我々の考えている場合、sheaf あるいは complex の level では比較できない (と思われる) が、cohomology をとれば比較できて、次の定理を得る。(証明には、もちろん、Th.4 と Th.5 を使う。)

Th.6　X を Th.4 に述べたスキームとする。さらに、

$$H^{\cdot}(X, \Omega^{\cdot}_{X/W_n}) \underset{W_n}{\otimes} k = H^{\cdot}(X_0, \Omega^{\cdot}_{X_0/k}) \quad (\forall i, j)$$

ならば（特に，$H^i(X, \Omega^j_{X/W_n})$ が free W_n-module ならば），

$$\mathrm{Fil}_H^{\,i}\left(H^m_{dR}(X/W_n)\right) = \mathrm{Fil}_{HW}^{\,i}\left(H^m_{dR}(X/W_n)\right) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

であり，$H^j(X_0, W_n\Omega^i_{X_0}) = H^j(X, \Omega^i_{X/W_n})$．

ここに，slope filtration において，$H^m_{crys}(X_0/W_n) = H^m_{dR}(X/W_n)$ と同一視し，Fil_H は Hodge filtration，Fil_{HW} は slope filtration．

§ 最後に，

講演中に ordinarity は ch = 0 の状況とよく似ていて（例えば，Hodge de Rham spectral sequence の退化，"$\mathrm{Fil}_H^{i+1} \oplus \mathrm{Fil}_c^{n-i} = H^n_{dR}(Y/k)$"（$\mathrm{Fil}_c$ は conjugate filtration）などと言って，その原因は，

$$\left\{\begin{array}{l} \circ\ \text{ordinarity} \\ \quad + \\ \circ\ \text{Hodge symmetry} \\ \quad + \\ \circ\ \text{torsion-freeness of} \\ \quad \text{crystalline cohomology} \end{array}\right. \Longrightarrow \exists\ \text{canonical lifting}$$

かもしれない（もちろん，まず初めに canonical の意味をはっきりさせないといけない）と言った（諏訪さんの希望）が，Deligne さんから手紙をもらい，一般にはそうでないだろうと言っており，Calabi-Yau くらいでもだめなのではないかと言っている。（次元 = 3 で）。この辺の事情がどうなっているのか，今の所，私には全くわからないでいるので，何かコメントが

ありましたら、お教えください。

文献

[BK] S. Bloch and K. Kato, p-adic Étale Cohomology, Publ. Math. IHES 63, (1986) pp. 107 - 152

[DI] P. Deligne and L. Illusie, Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, Invent. Math. 89, (1987), pp. 247 - 270

[IR] L. Illusie et M. Raynaud, Les suites spectrales associées au complexe de de Rham - Witt, Publ. Math. IHES 57, (1983) pp. 73 - 212

[K] K. Kato, On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of J. Fontaine and W. Messing), Advanced Studies in Pure. Math. 10, (1987), pp. 207 - 251

[M] W. Messing, The crystals associated to Barsotti-Tate groups, Lec. Notes in Math. 264, Springer Verlag (1972)

[N0] Y. Nakkajima, Logarithmic de Rham - Witt complexes of Kato - Illusie - Raynaud, UTMS 93-45 (preprint)

[N1] ———, On infinitesimal liftings and degeneracies of Hodge-de Rham spectral sequences, UTMS 93-46 (preprint)

[N2] ——, Liftings of Frobenius over W_2 and ordinary logarithmic schemes, UTMS 94-22 (preprint).

[Ka] N. Katz, Slope filtrations of F-crystals, Astérisque 63 (1979) pp. 113 – 164